

# LES PRÉ- $(a, b)$ -ALGÈBRES À HOMOTOPIE PRÈS

WALID ALOULOU

**RÉSUMÉ.** Dans cet article on étudie le concept d'algèbre à homotopie près pour une structure définie par deux opérations  $\wedge$  et  $\diamond$ . Des exemples importants d'une telle structure sont ceux des algèbres pré-Gerstenhaber et pré-Poisson. Etant donnée une structure d'algèbre pré-commutative et pré-Lie graduée pour deux décalages des degrés donnés par  $a$  et  $b$ , on définit la structure d'une pré- $(a, b)$ -algèbre et on donne une construction explicite de l'algèbre à homotopie près associée.

## **Abstract.**

We study in this article the concept of algebra up to homotopy for a structure defined by two operations  $\wedge$  and  $\diamond$ . Important examples of such structure are those of pre-Gerstenhaber and pre-Poisson algebras.

Given a structure of pre-commutative and pre-Lie algebra for two shifts of degree given by  $a$  and  $b$ , we define the structure of a pre- $(a, b)$ -algebra and we give an explicit construction of the associated algebra up to homotopy

## 1. INTRODUCTION

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre munie d'une opération  $m$  ( $m$  est associative, ou commutative, ou Lie...). On dira juste que  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre ou une algèbre d'opérade  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{P}$  est *Ass* ou *Com* ou *Lie*...). Dans beaucoup de cas, on sait définir la notion d'algèbre d'opérade  $\mathcal{P}$  à homotopie près de  $\mathcal{A}$ . Précisément, si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre, on lui associe canoniquement une cogèbre graduée  $(\mathcal{C}(\mathcal{A}), \Delta)$ . Une structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près sur  $\mathcal{A}$  est équivalente à la donnée d'une codérivation  $Q : (\mathcal{C}(\mathcal{A}), \Delta) \rightarrow (\mathcal{C}(\mathcal{A}), \Delta)$  de degré 1 et de carré nul (c'est à dire que  $Q$  est une codifférentielle). La cogèbre codifférentielle  $(\mathcal{C}(\mathcal{A}), \Delta, Q)$  est appelée la  $\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près de  $\mathcal{A}$ . Cette algèbre donne naturellement les complexes d'homologie et de cohomologie associés à ce type d'algèbre pour  $\mathcal{A}$  et ses modules (voir [AAC], [C]). Par exemple, si  $\mathcal{A}$  est une *Lie*-algèbre, alors on sait construire l'algèbre de Lie à homotopie près associée et retrouver l'homologie et la cohomologie de Chevalley-Eilenberg (des algèbres de Lie).

Lorsque  $\mathcal{A}$  possède deux opérations avec des relations de compatibilité, la construction de l'algèbre à homotopie près enveloppante correspondante est plus difficile. On peut citer

---

*Date:* 23/06/2012.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 16A03, 16W30, 16E45.

*Key words and phrases.* Algèbre à homotopie près, cogèbres, algèbres différentielles graduées.

dans ce cadre les  $(a, b)$ -algèbres (voir [A]). En particulier une  $(0, 0)$ -algèbre est une algèbre de Poisson graduée et une  $(0, -1)$ -algèbre est une algèbre de Gerstenhaber.

Un autre exemple d'algèbre à deux opérations est l'algèbre pré-Gerstenhaber à droite  $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$  définie dans [AAC2] par :

- $(\mathcal{G}, \wedge)$  est une algèbre de Zinbiel à droite graduée,  $|\wedge| = 0$ .
- $(\mathcal{G}[1], \diamond)$  est une algèbre pré-Lie à droite graduée,  $|\diamond| = -1$ .
- Les relations de compatibilité entre  $\wedge$  et  $\diamond$  sont :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{(|\beta|-1)|\gamma|} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta. \end{aligned}$$

Rappelons qu'une algèbre pré-Lie est un espace vectoriel  $V$  muni d'une loi  $\diamond$  telle que son antisymétrisée est une loi d'algèbre de Lie. Il existe donc une notion d'algèbre pré-Lie à homotopie près ([ChL]). De même, une algèbre pré-commutative, appelée aussi algèbre de Zinbiel est équipée d'un produit  $\wedge$ , dont le symétrisé est associatif et commutatif. Il existe donc une notion d'algèbre de Zinbiel à homotopie près ([Liv]).

Remarquons que si  $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$  est une algèbre pré-Gerstenhaber, alors si on symétrise  $\wedge$  et on antisymétrise  $\diamond$ , on obtient une algèbre de Gerstenhaber.

Le présent travail consiste à unifier les constructions d'algèbre à homotopie près dans les cas des algèbres pré-Poisson et des algèbres pré-Gerstenhaber, ce qui nous permet de définir la structure d'une pré- $(a, b)$ -algèbre à homotopie près. Disons qu'une pré- $(a, b)$ -algèbre est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{A}$  muni de deux produits  $\wedge$  de degré  $a \in \mathbb{Z}$  ( $|\wedge| = a$ ) et  $\diamond$  de degré  $b \in \mathbb{Z}$  ( $|\diamond| = b$ ) tel que  $(\mathcal{A}[-a], \wedge)$  est une algèbre de Zinbiel graduée et  $(\mathcal{A}[-b], \diamond)$  est une algèbre pré-Lie graduée. Ces deux produits vérifient des relations de compatibilité entre eux données par :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{(|\beta|+b)(|\gamma|+b)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{(|\beta|+b)(|\gamma|+a)} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta. \end{aligned}$$

Si on pose  $[\alpha, \beta] = \alpha \diamond \beta - (-1)^{(|\alpha|+b)(|\beta|+b)} \beta \diamond \alpha$  et  $\alpha.\beta = \alpha \wedge \beta + (-1)^{(|\alpha|+a)(|\beta|+a)} \beta \wedge \alpha$ , on obtient que  $(\mathcal{A}, ., [ , ])$  est une  $(a, b)$ -algèbre.

Dans le cas où  $a = 0$  et  $b = -1$ , on retrouve les algèbres pré-Gerstenhaber et dans le cas où  $a = b = 0$ , on trouve une algèbre qu'il est naturel d'appeler algèbre pré-Poisson graduées.

## 2. GÉNÉRALITÉS

Soit  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$  gradué. Le degré d'un élément homogène  $x$  dans  $V$  est noté  $|x|$ . On notera  $T^+(V)$  l'espace  $\bigoplus_{n \geq 0} \bigotimes^n V$ , gradué par  $|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ .

**Définition 2.1.**

1) Une algèbre graduée est un espace vectoriel gradué  $V$  muni d'une application bilinéaire  $m : V \otimes V \rightarrow V$  de degré 0 ( $|m| = 0$ ) c'est à dire :

$$m(V_i \otimes V_j) \subset V_{i+j}.$$

2) Une dérivation  $d$  de l'algèbre  $(V, m)$  est une application vérifiant :

$$d \circ m = m \circ (d \otimes id + id \otimes d).$$

Si  $d$  est de degré 1 et  $d^2 = 0$ , on dit que  $d$  est une différentielle de  $(V, m)$ .

**Définition 2.2.**

1) Une cogèbre graduée est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{C}$  muni d'une application linéaire  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  dite comultiplication de  $\mathcal{C}$  vérifiant :

$$\Delta \mathcal{C}_k \subset \sum_{i+j=k} \mathcal{C}_i \otimes \mathcal{C}_j$$

2) Une codérivation  $Q$  de la cogèbre  $(\mathcal{C}, \Delta)$  est une application vérifiant :

$$\Delta \circ Q = (Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta.$$

Si  $Q$  est de degré 1 et  $Q^2 = 0$ , on dit que  $Q$  est une codifférentielle de  $(\mathcal{C}, \Delta)$ . Dans ce cas, on dit que  $(\mathcal{C}, \Delta, Q)$  est une cogèbre codifférentielle.

Par définition, l'espace  $V[1]$  est le même espace que  $V$ , mais avec un décalage du degré : le degré d'un élément homogène  $x$  dans  $V[1]$  noté  $deg(x)$  devient  $deg(x) = |x| - 1$ .

Les bonnes structures algébriques sont des lois associées à une opérade quadratique  $\mathcal{P}$  ([GK]). En effet, si  $V$  est un espace vectoriel gradué, on peut dans ce cas construire la cogèbre colibre  $(W, \Delta)$  sur l'opérade duale  $\mathcal{P}^!$  engendré par le décalé  $V[1]$  de  $V$ .

Dans cette situation, dire qu'une loi  $m : V \otimes V \rightarrow V$  de degré 0 est une structure de type  $\mathcal{P}$ , c'est dire que sa décalée  $m' : V[1] \otimes V[1] \rightarrow V[1]$  est bilinéaire, de degré 1 et vérifie les symétries associées à l'opérade  $\mathcal{P}^!$ , donc est prolongeable de façon unique en une codérivation  $Q$  de  $(W, \Delta)$  et la loi  $m$  vérifie les axiomes de la structure si et seulement si,  $Q$  vérifie l'équation de structure  $[Q, Q] = 2Q^2 = 0$ .

Toujours dans ce cas, on parlera de  $\mathcal{P}_\infty$  algèbre ou d'algèbre à homotopie près pour toute cogèbre codifférentielle  $(W, \Delta, Q)$  correspondante à  $(W, \Delta)$ .

**Définition 2.3.** [GK]

*Une structure de  $\mathcal{P}_\infty$  algèbre sur un espace vectoriel  $V$  est définie par la donnée d'une codifférentielle  $Q$  sur la  $\mathcal{P}^1$ -cogèbre  $(W, \Delta)$  construite à partir de  $V$ .*

En particulier, si  $(V, m, d)$  est une algèbre différentielle, on peut prolonger  $d + m'$  en une unique codérivation  $Q$  de degré 1 de  $(W, \Delta)$  telle que  $Q^2 = 0$ , c'est à dire  $(W, \Delta, Q)$  est une  $\mathcal{P}_\infty$  algèbre. Décrivons quelques exemples.

### 3. LES $(a, b)$ -ALGÈBRES À HOMOTOPIE PRÈS

Cette section consiste à unifier les constructions d'algèbre à homotopie près dans les cas des algèbres de Poisson et des algèbres de Gerstenhaber, ce qui nous permet de définir la structure d'une  $(a, b)$ -algèbre à homotopie près.

#### 3.1. Définitions et notations.

**Définition 3.1.**

*Considérons un espace vectoriel  $\mathcal{A}$  gradué. Le degré d'un élément homogène  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$  est noté  $|\alpha|$ . Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ , l'espace  $\mathcal{A}$  est muni d'un produit  $\cdot$  de degré  $a$  ( $|\cdot| = a$ ) et d'un crochet  $[\cdot, \cdot]$  de degré  $b$  ( $|\cdot| = b$ ) tel que  $(\mathcal{A}[-a], \cdot)$  est une algèbre commutative et associative graduée et  $(\mathcal{A}[-b], [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Lie graduée. De plus, l'application linéaire  $ad : \mathcal{A}[-b] \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}[-a], \cdot); \alpha \mapsto ad_\alpha$  est telle que  $ad_\alpha$  soit une dérivation graduée pour le produit ..*

*On dit que  $(\mathcal{A}, \cdot, [\cdot, \cdot])$  est une  $(a, b)$ -algèbre graduée. Pour tout  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ , on a les propriétés suivantes :*

- (i)  $\alpha \cdot \beta = (-1)^{(|\alpha|+a)(|\beta|+a)} \beta \cdot \alpha,$
- (ii)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$
- (iii)  $[\alpha, \beta] = -(-1)^{(|\alpha|+b)(|\beta|+b)} [\beta, \alpha],$
- (iv)  $(-1)^{(|\alpha|+b)(|\gamma|+b)} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(|\beta|+b)(|\alpha|+b)} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{(|\gamma|+b)(|\beta|+b)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$

$$(v) [\alpha, \beta \cdot \gamma] = [\alpha, \beta] \cdot \gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)} \beta \cdot [\alpha, \gamma]$$

$$\text{qui s'écrit encore } [\alpha \cdot \beta, \gamma] = \alpha \cdot [\beta, \gamma] + (-1)^{(|\beta|+a)(|\gamma|+b)} [\alpha, \gamma] \cdot \beta.$$

De plus, si on a une différentielle  $d : \mathcal{A}[-a] \longrightarrow \mathcal{A}[-a+1]$  (ou  $d : \mathcal{A}[-b] \longrightarrow \mathcal{A}[-b+1]$ ) de degré 1 vérifiant  $d \circ d = 0$ ,

$$d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|+a} \alpha \cdot d\beta \text{ et } d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{|\alpha|+b} [\alpha, d\beta],$$

on dira que  $(\mathcal{A}, \cdot, [\ , \ ], d)$  est une  $(a, b)$ -algèbre différentielle graduée.

On utilise un décalage pour homogénéiser le produit et la différentielle. On considère l'espace  $\mathcal{A}[-a+1]$  muni de la graduation  $dg(\alpha) = |\alpha| + a - 1$  que l'on note simplement par  $\alpha$ . Sur  $\mathcal{A}[-a+1]$ , le produit  $\cdot$  n'est plus commutatif et le crochet  $[\ , \ ]$  n'est plus antisymétrique. On construit, donc, un nouveau produit  $\mu$  sur  $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-a][1]$  de degré 1 défini par

$$\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{1 \cdot \alpha} \alpha \cdot \beta$$

et un nouveau crochet  $\ell$  sur  $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-b][b-a+1]$  de degré  $b-a+1$  défini par

$$\ell(\alpha, \beta) = (-1)^{(b-a+1) \cdot \alpha} [\alpha, \beta].$$

Et on a

$$(i) \mu(\alpha, \beta) = -(-1)^{\alpha\beta} \mu(\beta, \alpha),$$

$$(ii) \mu(\mu(\alpha, \beta), \gamma) = -(-1)^\alpha \mu(\alpha, \mu(\beta, \gamma)),$$

$$(iii) \ell(\alpha, \beta) = -(-1)^{b-a+1} (-1)^{\alpha\beta} \ell(\beta, \alpha),$$

$$(iv) (-1)^{\alpha\gamma} \ell(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{\beta\alpha} \ell(\ell(\beta, \gamma), \alpha) + (-1)^{\gamma\beta} \ell(\ell(\gamma, \alpha), \beta) = 0,$$

$$(v) \ell(\alpha, \mu(\beta, \gamma)) = (-1)^{\alpha+b-a+1} \mu(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{(\alpha+b-a+1)(\beta+1)} \mu(\beta, \ell(\alpha, \gamma)),$$

ou encore

$$\ell(\alpha, \mu(\beta, \gamma)) = (-1)^{(b-a+1)(\alpha+1)} \mu(\alpha, \ell(\beta, \gamma)) + (-1)^{b-a+1+\beta\gamma} \mu(\ell(\alpha, \gamma), \beta).$$

De plus,  $d$  reste encore une dérivation pour  $\mu$  et  $\ell$ , elle vérifie :

$$d(\mu(\alpha, \beta)) = -\mu(d\alpha, \beta) + (-1)^{\alpha+1} \mu(\alpha, d\beta)$$

$$\text{et } d(\ell(\alpha, \beta)) = (-1)^{b-a+1} \ell(d\alpha, \beta) + (-1)^{\alpha+b-a+1} \ell(\alpha, d\beta).$$

### 3.2. Extension de la multiplication et du crochet à la cogèbre de Lie codifférentielle.

On considère l'espace  $\mathcal{A}[-a+1]$  muni du degré  $deg(\alpha) = |\alpha| - 1 = \alpha$ . Une permutation  $\sigma \in S_{p+q}$  ( $p, q \geq 1$ ) est dite un  $(p, q)$ -shuffle si elle vérifie :

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

On note  $Sh(p, q)$  l'ensemble des  $(p, q)$ -shuffles.

On note aussi

$$\varepsilon_\alpha \left( \begin{smallmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{i_1} & \dots & \alpha_{i_n} \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_\alpha(\sigma)$$

la signature de la permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ , en tenant compte des degrés de  $\alpha_j$ , autrement dit,  $\varepsilon_\alpha$  est l'unique morphisme de  $S_n$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\varepsilon_\alpha((i, j)) = (-1)^{\alpha_i \alpha_j}$ .

On définit ensuite le produit shuffle sur  $\bigotimes^+ \mathcal{A}[-a+1]$  par :

$$sh_{p,q}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p, \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}) = \sum_{\sigma \in Sh(p,q)} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

On définit alors l'espace quotient

$$\mathcal{H} = \bigotimes^+ \mathcal{A}[-a+1] = \bigoplus_{n \geq 1} \bigotimes^n \mathcal{A}[-a+1] / \sum_{p+q=n} Im(sh_{p,q}).$$

Pour  $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in \mathcal{H}$ , le degré  $dg(X) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  noté simplement par  $x$ . Sur cet espace, on définit un cocrochet  $\delta$  de degré 0 par :

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \\ &\quad - \varepsilon_\alpha \left( \begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_n & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \bigotimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \\ &= \sum_{\substack{U \underline{\otimes} V = X \\ U, V \neq \emptyset}} U \bigotimes V - (-1)^{vu} V \bigotimes U. \end{aligned}$$

On prolonge  $\mu$  et  $d$  à  $\mathcal{H}$  comme des codérivations  $\mu_1$  et  $d_1$  de  $\delta$  de degré 1 en posant :

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i < k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i < k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors,

$$(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1, \mu_1^2 = 0, (d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1 \text{ et } d_1^2 = 0.$$

(Voir [AAC1])

En posant  $D_1 = d$ ,  $D_2 = \mu$ ,  $D_k = 0$ , si  $k \geq 3$  et

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) &= \\ \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \underline{\otimes} D_r(\alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{j+r}) \underline{\otimes} \alpha_{j+r+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n. \end{aligned}$$

Alors,  $D = d_1 + \mu_1$  est l'unique codérivation de  $\delta$  de degré 1 qui prolonge  $d$  et  $\mu$  à  $\mathcal{H}$ . Elle vérifie

$$D \circ D = 0 \text{ et } (D \otimes id + id \otimes D) \circ \delta = \delta \circ D.$$

On obtient que  $(\mathcal{H}, \delta, D)$  est une cogèbre de Lie codifférentielle, donc, c'est une  $C_\infty$  algèbre.

On prolonge, ensuite, le crochet  $\ell$  à  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 3.2.**

Sur  $\mathcal{H}$ , il existe une unique "crochet"  $\ell_2$ , de degré  $b - a + 1$ , vérifiant :

$$(3.1) \quad \delta \circ \ell_2 = (\ell_2 \otimes id) \circ (\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta) + (id \otimes \ell_2) \circ (\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)).$$

Ce crochet est défini pour  $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$  et  $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$  par :

$$\begin{aligned} \ell_2(X, Y) = \sum_{\substack{\sigma \in Sh(p, q) \\ k, \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \times \\ \times \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

**3.3. Algèbre de Lie différentielle graduée associée à une (a, b)-algèbre différentielle.**

On considère, maintenant, l'espace  $\mathcal{H}[a - b - 1]$  muni de la graduation  $dg'(X) = dg(X) - a + b + 1$  noté simplement par  $x'$  pour  $X \in \mathcal{H}[a - b - 1]$ . On pose  $\ell'_2(X, Y) = (-1)^{(a-b-1)dg'(X)} \ell_2(X, Y)$ . Alors, le crochet  $\ell'_2$  est de degré 0 dans  $\mathcal{H}[a - b - 1]$  et la différentielle  $D$  reste de degré 1. Et on a

**Proposition 3.3.**

L'espace  $\mathcal{H}[a - b - 1]$ , muni du crochet  $\ell'_2$  et de la différentielle  $D$  est une algèbre de Lie différentielle graduée : Pour tout  $X, Y$  et  $Z$  de  $\mathcal{H}[a - b - 1]$ , on a :

- (i)  $\ell'_2(X, Y) = -(-1)^{x'y'} \ell'_2(Y, X),$
- (ii)  $(-1)^{x'z'} \ell'_2(\ell'_2(X, Y), Z) + (-1)^{y'x'} \ell'_2(\ell'_2(Y, Z), X) + (-1)^{z'y'} \ell'_2(\ell'_2(Z, X), Y) = 0,$
- (iii)  $D(\ell'_2(X, Y)) = \ell'_2(D(X), Y) + (-1)^{x'} \ell'_2(X, D(Y)).$

**3.4. La  $L_\infty$  algèbre  $S^+(\mathcal{H}[a - b])$ .**

Dans le paragraphe précédent, on a montré que  $(\mathcal{H}[a - b - 1], \ell'_2, D)$  est une algèbre de Lie différentielle graduée. On considère l'espace  $\mathcal{H}[a - b]$  muni de la graduation

$$dg''(X) = dg'(X) - 1 = dg(X) - a + b := x'', \text{ pour tout } X \in \mathcal{H}[a - b].$$

On voudrait construire la cogèbre cocommutative coassociative  $(S^+(\mathcal{H}[a - b]), \Delta)$ , où  $S^+(\mathcal{H}[a - b]) = \bigoplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[a - b])$  et  $\Delta$  est son coproduit qui est de degré 0 et défini par :

$$\forall X_1 \dots X_n \in S^n(\mathcal{H}[a-b]),$$

$$\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \otimes X_J.$$

Le crochet  $\ell'_2$  était antisymétrique de degré 0 sur  $\mathcal{H}[a-b-1]$ . Comme l'on veut une codérivation de degré 1 pour  $\Delta$ , on pose  $\ell''_2(X, Y) = (-1)^{x''} \ell'_2(X, Y)$  qui est une application symétrique sur  $\mathcal{H}[a-b]$  de degré 1. On a

**Proposition 3.4.**

Pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{H}[a-b]$ , on a :

- (i)  $\ell''_2(X, Y) = (-1)^{x''y''} \ell''_2(Y, X)$ ,
- (ii)  $(-1)^{x''z''} \ell''_2(\ell''_2(X, Y), Z) + (-1)^{y''x''} \ell''_2(\ell''_2(Y, Z), X) + (-1)^{z''y''} \ell''_2(\ell''_2(Z, X), Y) = 0$ ,
- (iii)  $D(\ell''_2(X, Y)) = -\ell''_2(D(X), Y) + (-1)^{1+x''} \ell''_2(X, D(Y))$ .

On prolonge  $\ell''_2$  à  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$  de façon unique comme une codérivation  $\ell''$  de  $\Delta$  de degré 1 en posant :

$$\ell''(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_j x_1 \dots \widehat{i} j \dots x_n \end{smallmatrix} \right) \ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \widehat{i} j \dots X_n.$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on peut vérifier que  $\ell'' \circ \ell'' = 0$ .

On prolonge, aussi, la différentielle  $D$  à  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$  comme l'unique codérivation  $m$  de  $\Delta$  toujours de degré 1 en posant :

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_1 \dots \widehat{i} \dots x_n \end{smallmatrix} \right) D(X_i) \cdot X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n.$$

Elle vérifie  $m \circ m = 0$ .

On pose  $Q = m + \ell''$ , ou  $Q_1 = D$ ,  $Q_2 = \ell''_2$ ,  $Q_k = 0$ , si  $k \geq 3$  et

$$Q(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_J \end{smallmatrix} \right) Q_{\#I}(X_I) \cdot X_J.$$

Alors,  $Q$  vérifie  $Q^2 = 0$  et  $(Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta = \Delta \circ Q$ .

Donc, le complexe  $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \Delta, Q)$  est une cogèbre cocommutative coassociative et codifférentielle, c'est à dire une  $L_\infty$  algèbre.



### 3.5. La $C_\infty$ algèbre $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ .

L'espace  $(\mathcal{H}, \delta, D)$  étant une cogèbre de Lie codifférentielle, on définit un cocrochet  $\delta''$  de degré  $a-b$  sur  $\mathcal{H}[a-b]$  par :

$$\delta''(X) = \sum_{\substack{U \otimes V = X \\ U, V \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)u''} \left( U \otimes V + (-1)^{u''v''+a-b+1} V \otimes U \right).$$

On prolonge  $\delta''$  à  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$  par :

$$\begin{aligned} \delta''(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_s x_J \end{smallmatrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \\ &\quad \times \left( X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right), \end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \delta''(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i < s} (a-b)x''_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)u''_s} \times \\ &\quad \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I u_s v_s x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I v_s u_s x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right), \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I u_s v_s x_J \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_s x_J \end{smallmatrix} \right) (-1)^{\sum_{i \in J} x''_i} (-1)^{\sum_{i \in I} x''_i}.$$

Alors,  $\delta''$  est un cocrochet sur  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$  de degré  $a-b$ . En notant  $\tau''$  la volte dans  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ ,  $\delta''$  vérifie :

#### Proposition 3.5.

- i)  $\tau'' \circ \delta'' = -(-1)^{a-b} \delta''$  :  $\delta''$  est  $(a-b)$ -coantisymétrique,
- ii)  $(id^{\otimes 3} + \tau''_{12} \circ \tau''_{23} + \tau''_{23} \circ \tau''_{12}) \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta'' = 0$  : identité de coJacobi,
- iii)  $(id \otimes \Delta) \circ \delta'' = (\delta'' \otimes id) \circ \Delta + \tau''_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta$  : identité de coLeibniz.

Ainsi  $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \delta'')$  est une cogèbre de Lie. On montre qu'avec  $Q = m + \ell''$ , elle est codifférentielle.

#### Proposition 3.6.

$m$  et  $\ell''$  sont des codérivations de  $\delta''$  de degré 1, ils vérifient :

- (i)  $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \delta'' = (-1)^{a-b} \delta'' \circ m$ .
- (ii)  $(\ell'' \otimes id + id \otimes \ell'') \circ \delta'' = (-1)^{a-b} \delta'' \circ \ell''$ .

Alors, le complexe  $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \delta'', Q)$  est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, donc, c'est aussi une  $C_\infty$  algèbre.

Enfin, le cocrochet  $\delta''$  et le coproduit  $\Delta$  vérifient l'identité de coLeibniz :

$$(id \otimes \Delta) \circ \delta'' = (\delta'' \otimes id) \circ \Delta + \tau''_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta.$$

Alors,  $\left(S^+\left(\mathcal{H}[a-b]\right), \Delta, \delta'', Q\right)$  est une bicogèbre codifférentielle graduée.

**Définition 3.7.**

Une  $(a, b)$ -algèbre à homotopie près sur un espace vectoriel gradué  $V$  est définie par la donnée d'une codifférentielle  $Q$ , de degré 1 et de carré nul sur la bicogèbre

$$\left(S^+\left(\left(\bigotimes^+ V[-a+1]\right)[a-b]\right), \Delta, \delta''\right).$$

En particulier, si  $\mathcal{A}$  est une  $(a, b)$ -algèbre différentielle. Alors, la bicogèbre colibre et co-différentielle

$$\left(\mathcal{C}(\mathcal{A}) = S^+\left(\left(\bigotimes^+ \mathcal{A}[-a+1]\right)[a-b]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right)$$

est la  $(a, b)$ -algèbre à homotopie près enveloppante de  $\mathcal{A}$ .

**Remarque 3.8.**

- Dans le cas où  $a = 0$ ,  $b = -1$  et  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Gerstenhaber différentielle, on retrouve l'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près enveloppante de  $\mathcal{A}$  :

$$\left(S^+\left(\left(\bigotimes^+ \mathcal{A}[1]\right)[1]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right).$$

- Dans le cas où  $a = b = 0$  et  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Poisson différentielle graduée, on retrouve le complexe de l'algèbre de Poisson à homotopie près enveloppante de  $\mathcal{A}$  :

$$\left(S^+\left(\bigotimes^+ \mathcal{A}[1]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right).$$

Cette construction généralise celle des algèbres de Gerstenhaber et de Poisson à homotopie près.

#### 4. LES ALGÈBRES PRÉ-LIE ET PRÉ-COMMUTATIVES À HOMOTOPIE PRÈS

##### 4.1. Les algèbres pré-Lie à homotopie près.

La notion d'algèbre pré-Lie a été étudiée par Livernet et Chapoton ([Liv, ChL]). Une loi pré-Lie est une loi binaire dont l'antisymétrisé est un crochet de Lie. Plus précisément :

**Définition 4.1.**

Une algèbre pré-Lie (à droite) graduée  $(V, \diamond)$  est un espace gradué  $V$  muni d'un produit  $\diamond$  de degré 0 vérifiant :

$$\forall x, y, z \in V, \quad (x \diamond y) \diamond z - x \diamond (y \diamond z) = (-1)^{|y||z|}((x \diamond z) \diamond y - x \diamond (z \diamond y)).$$

Si de plus,  $d : V \longrightarrow V$  est une différentielle de degré 1 telle que

$$d(x \diamond y) = dx \diamond y + (-1)^{1 \cdot |x|} x \diamond dy,$$

on dira que  $(V, \diamond, d)$  est une algèbre pré-Lie différentielle graduée.

Cette structure est associée à une opérade quadratique, l'opérade  $preLie$ . L'opérade duale, déterminée par [ChL], est l'opérade permutative :  $preLie^! = Perm$ .

Rappelons qu'une algèbre permutative (à droite)  $(V, \cdot)$  est un espace gradué  $V$  muni d'un produit  $\cdot$  de degré 0, vérifiant :

$$\forall x, y, z \in V, \quad x.(y.z) = (-1)^{|y||z|}x.(z.y) = (x.y).z.$$

**Définition 4.2.**

Une  $preLie^!$ -cogèbre (ou cogèbre permutative) est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{C}$  muni d'une comultiplication  $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  de degré 0 vérifiant :

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = \tau_{23} \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.$$

**Proposition 4.3.** [ChL]

Si  $V$  un espace vectoriel gradué. Alors la cogèbre permutative colibre associée à  $V[1]$  est  $(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta)$  où  $\Delta$  est défini par  $\Delta(x \otimes 1) = 0$  et :

$$\Delta(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ \sigma \in Sh_{k,1,n-k-1}}} \varepsilon_x(\sigma) x_0 \otimes (x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}) \bigotimes x_{\sigma(k+1)} \otimes (x_{\sigma(k+2)} \dots x_{\sigma(n)}).$$

(Ici,  $Sh_{k,1,n-k-1}$  est l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $S_n$  telles que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  et  $\sigma(k+2) < \dots < \sigma(n)$ ).

**Remarque 4.4.**

Identifions  $S^{n+1}(V[1])$  avec un sous espace de  $V[1] \otimes S^n(V[1])$  en posant

$$x_0 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \varepsilon_x(\sigma^{-1}) x_{\sigma(0)} \otimes x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) &= \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} \varepsilon_x \left( \begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_I & & x_J \end{smallmatrix} \right) (x_0 \otimes x_I) \bigotimes x_J \\ &= x_0 \bigotimes x_1 \dots x_n + x_0 \otimes \Delta'(x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

où  $\Delta'(x_1 \dots x_n)$  est le coproduit de la cogèbre cocommutative colibre  $S^+(V[1])$ .

Il est alors clair que  $\Delta(x_0 \dots x_n) = \Delta'(x_0 \dots x_n)$ .

**Définition 4.5.**

Une  $preL_\infty$  algèbre est une cogèbre permutative codifférentielle  $(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta, Q)$  telle que  $Q$  est une codérivation de  $\Delta$  de degré 1 et  $Q^2 = 0$ .

**Proposition 4.6.** [ChL]

Soit  $(V, \diamond, d)$  une algèbre pré-Lie différentielle graduée. On pose

$$Q_1(x) = dx, \quad Q_2(x_1 \otimes x_2) = (-1)^{x_1} x_1 \diamond x_2, \quad Q_k = 0, \forall k \geq 3$$

et

$$\begin{aligned} Q(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) &= Q_1(x_0) \otimes x_1 \dots x_n + (-1)^{x_0} \sum_{k=1}^n (-1)^{\sum_{i < k} x_i} x_0 \otimes x_1 \dots Q_1(x_k) \dots x_n + \\ &+ \sum_{\sigma \in Sh_{1, n-1}} \varepsilon_x(\sigma) Q_2(x_0 \otimes x_{\sigma(1)}) \otimes x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} + \\ &+ (-1)^{x_0} \sum_{\sigma \in Sh_{1, 1, n-2}} \varepsilon_x(\sigma) x_0 \otimes Q_2(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)}) \cdot x_{\sigma(3)} \dots x_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Alors,  $(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta, Q)$  est une  $preL_\infty$  algèbre dite la  $preL_\infty$  algèbre enveloppante de  $(V, \diamond, d)$ .

#### 4.2. Les algèbres pré-commutative (ou de Zinbiel) à homotopie près.

Une loi d'algèbre pré-commutative, ou d'algèbre de Zinbiel, est une loi binaire dont le symétrisé est une loi commutative et associative. Plus précisément :

**Définition 4.7.** [L1, Liv]

On dit que  $(V, \wedge, d)$  est une algèbre de Zinbiel (ou pré-commutative) à droite, différentielle et graduée si  $V$  est un espace gradué muni d'un produit  $\wedge$  de degré 0 et d'une différentielle  $d$  de degré 1 vérifiant :

- $\forall x, y, z \in V, (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) + (-1)^{|y||z|} x \wedge (z \wedge y),$
- $\forall x, y \in V, d(x \wedge y) = dx \wedge y + (-1)^{|x|} x \wedge dy.$

Cette structure est associée à une opérade quadratique, l'opérade  $Zinb$ . L'opérade duale, déterminée par [L1, Liv], est l'opérade Leibniz :  $Zinb^! = Leib$ .

Rappelons qu'une algèbre de Leibniz (à droite)  $(V, [ , ])$  est un espace gradué  $V$  muni d'un crochet  $[ , ]$  de degré 0 vérifiant :

$$\forall x, y, z \in V, [[x, y], z] = [x, [y, z]] + (-1)^{|y||z|} [[x, z], y].$$

**Définition 4.8.** [Liv]

Une  $Zinb^!$ -cogèbre ou cogèbre de Leibniz est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{C}$  muni d'une comultiplication  $\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  de degré 0 vérifiant :

$$(id \otimes \delta) \circ \delta = \left( \delta \otimes id - \tau_{23} \circ (\delta \otimes id) \right) \circ \delta.$$

La cogèbre de Leibniz colibre engendrée par  $V[1]$  est donnée par :

**Proposition 4.9.** [Liv]

Soit  $V$  un espace vectoriel gradué. Alors la cogèbre de Leibniz colibre graduée engendrée par  $V[1]$  est  $(T^+(V[1]), \delta)$  où  $\delta$  est défini par :

$$\delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \leq k \leq n-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \bigotimes \mu_{n-k}(x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n),$$

les  $\mu_j$  sont définis par récurrence ainsi :  $\mu_1 = id$ , et, si  $\tau_n$  est le cycle  $(1, \dots, n)$  de  $S_n$ ,

$$\mu_{n+1} = \mu_n \otimes id - (\mu_n \otimes id) \circ \tau_{n+1}^{-1}.$$

(Comme pour la volte, l'action des  $\mu_j$  sur les produits tensoriels est signée).

On peut montrer par récurrence :

**Lemme 4.10.**

Pour tout  $p, q$  positif,

$$\mu_{p+q} \circ sh_{p,q} = 0.$$

**Définition 4.11.**

Une structure de  $Z_\infty$  algèbre est la donnée d'une cogèbre de Leibniz codifférentielle  $(T^+(V[1]), \delta, Q)$  telle que  $Q$  est une codérivation de  $\delta$  de degré 1 et de carré nul.

**Proposition 4.12.** [Liv]

Soit  $(V, \wedge, d)$  une algèbre de Zinbiel différentielle graduée. On pose

$$Q_1(x) = dx, \quad Q_2(x \otimes y) = (-1)^x x \wedge y, \quad Q_k = 0, \quad \forall k \geq 3,$$

et

$$\begin{aligned} Q(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{\sum_{i < k} x_i} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k-1} \otimes Q_1(x_k) \otimes x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n + \\ &+ Q_2(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_n + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < k} x_i} x_1 \otimes \cdots \otimes Q_2 \circ \mu_2(x_k \otimes x_{k+1}) \otimes \cdots \otimes x_n. \end{aligned}$$

Alors,  $(T^+(V[1]), \delta, Q)$  est une  $Z_\infty$  algèbre appelée la  $Z_\infty$  algèbre enveloppante de  $(V, \lambda, d)$ .

## 5. LES PRÉ- $(a, b)$ -ALGÈBRES

### Définition 5.1.

Soient  $\mathcal{A}$  un espace vectoriel gradué et  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On munit l'espace  $\mathcal{A}$  d'un produit  $\lambda$  de degré  $a$  ( $|\lambda| = a$ ) et d'un produit  $\diamond$  de degré  $b$  ( $|\diamond| = b$ ) tel que  $(\mathcal{A}[-a], \lambda)$  soit une algèbre pré-commutative graduée et  $(\mathcal{A}[-b], \diamond)$  soit une algèbre pré-Lie graduée. C'est à dire :

$$(\alpha \lambda \beta) \lambda \gamma = \alpha \lambda (\beta \lambda \gamma) + (-1)^{(|\beta|+a)(|\gamma|+a)} \alpha \lambda (\gamma \lambda \beta),$$

$$(\alpha \diamond \beta) \diamond \gamma - \alpha \diamond (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|+b)(|\gamma|+b)} ((\alpha \diamond \gamma) \diamond \beta - \alpha \diamond (\gamma \diamond \beta)).$$

De plus, les produits  $\lambda$  et  $\diamond$  vérifient les relations de compatibilités suivantes :

$$\alpha \lambda (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|+b)(|\gamma|+b)} \alpha \lambda (\gamma \diamond \beta)$$

$$\alpha \diamond (\beta \lambda \gamma) = (\alpha \diamond \beta) \lambda \gamma$$

$$(\alpha \diamond \beta) \lambda \gamma = (-1)^{(|\beta|+b)(|\gamma|+a)} (\alpha \lambda \gamma) \diamond \beta.$$

On dira que  $(\mathcal{A}, \lambda, \diamond)$  est une pré- $(a, b)$ -algèbre (à droite) graduée.

Si on pose  $[\alpha, \beta] = \alpha \diamond \beta - (-1)^{(|\alpha|+b)(|\beta|+b)} \beta \diamond \alpha$  et  $\alpha \cdot \beta = \alpha \lambda \beta + (-1)^{(|\alpha|+a)(|\beta|+a)} \beta \lambda \alpha$ , on obtient que  $(\mathcal{A}, \cdot, [\cdot, \cdot])$  est une  $(a, b)$ -algèbre. On aura aussi les deux relations suivantes :

$$\alpha \lambda [\beta, \gamma] = 0$$

$$[\alpha, \beta \lambda \gamma] = [\alpha, \beta] \lambda \gamma.$$

### Exemple 5.2. ([AAC2])

Une algèbre pré-Gerstenhaber à droite graduée est un triplet  $(\mathcal{G}, \lambda, \diamond)$  tel que :

- $(\mathcal{G}, \lambda)$  est une algèbre de Zinbiel à droite graduée,  $|\lambda| = 0$ .
- $(\mathcal{G}[1], \diamond)$  est une algèbre pré-Lie à droite graduée,  $|\diamond| = -1$ .

– On impose les relations de compatibilité suivantes entre  $\wedge$  et  $\diamond$  :

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{(|\beta|-1)|\gamma|} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta.\end{aligned}$$

Dans ce cas,  $(\mathcal{G}, \cdot, [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Gerstenhaber.

### Exemple 5.3.

Une algèbre pré-Poisson à droite graduée est un triplet  $(\mathcal{P}, \wedge, \diamond)$  tel que :

- $(\mathcal{P}, \wedge)$  est une algèbre de Zinbiel à droite graduée,  $|\wedge| = 0$ .
- $(\mathcal{P}, \diamond)$  est une algèbre pré-Lie à droite graduée,  $|\diamond| = 0$ .
- On impose les relations de compatibilité suivantes entre  $\wedge$  et  $\diamond$  :

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{|\beta||\gamma|} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{|\beta||\gamma|} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta.\end{aligned}$$

Dans ce cas,  $(\mathcal{P}, \cdot, [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Poisson graduée.

### Exemple 5.4.

Soit  $\mathcal{A}$  l'espace des formes différentielles sur une variété  $M$ . On peut munir  $\mathcal{A}$  de la graduation :  $|\alpha| = 2k + 3$ , si  $\alpha$  est un  $k$ -forme. L'espace  $\mathcal{A}$  est stable par le produit extérieur  $\wedge$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux formes différentielles de  $\mathcal{A}$ , on définit :

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{|\beta|} \alpha \wedge d\beta \quad \text{et} \quad \alpha \diamond \beta = \alpha \wedge \beta.$$

Alors, on vérifie que  $|\wedge| = -1$  et  $|\diamond| = -3$ .

Pour  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathcal{A}$ , on vérifie aussi que :

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\gamma \wedge \beta),$$

et

$$(\alpha \diamond \beta) \diamond \gamma - \alpha \diamond (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|-3)(|\gamma|-3)} \left( (\alpha \diamond \gamma) \diamond \beta - \alpha \diamond (\gamma \diamond \beta) \right).$$

Les relations de compatibilités entre  $\wedge$  et  $\diamond$  sont aussi vérifiées :

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{(|\beta|-3)(|\gamma|-3)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{(|\beta|-3)(|\gamma|-1)} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta.\end{aligned}$$

Ainsi,  $(\mathcal{A}, \wedge, \diamond)$  est bien une pré- $(-1, -3)$ -algèbre.

## 6. L'ALGÈBRE PRÉ-LIE DIFFÉRENTIELLE $(\mathcal{H}[a-b-1], R'_2, D)$

Soit  $(\mathcal{A}, \wedge, \diamond)$  une pré- $(a, b)$ -algèbre. Puisque  $\wedge$  est une loi pré-commutative, on lui a associé une cogèbre de Leibniz codifférentielle  $(\mathcal{H}, \delta, D)$ . Dans cette section, on montre que  $\mathcal{H}[a-b-1]$  est aussi muni d'une structure d'algèbre pré-Lie différentielle.

Pour cela, comme ci-dessus, on utilise un décalage de degré. On considère l'espace  $\mathcal{A}[-a+1]$  muni de la graduation  $dg(\alpha) = |\alpha| + a - 1$  que l'on note simplement par  $\alpha$ . Sur  $\mathcal{A}[-a+1]$ , le produit  $\wedge$  n'est plus de Zinbiel et le produit  $\diamond$  n'est pas pré-Lie. On construit, donc, un nouveau produit  $\wedge$  sur  $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-a][1]$  de degré 1 défini par :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{1 \cdot \alpha} \alpha \wedge \beta,$$

et un nouveau produit  $\diamond$  sur  $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-b][b-a+1]$  de degré  $b-a+1$  défini par :

$$\alpha \diamond \beta = (-1)^{(b-a+1) \cdot \alpha} \alpha \diamond \beta.$$

Les produits  $\wedge$  et  $\diamond$  vérifient :

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= -\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + (-1)^{\beta \gamma} \alpha \wedge (\gamma \wedge \beta) \\ (\alpha \diamond \beta) \diamond \gamma - (-1)^{(b-a+1)(\alpha+1)} \alpha \diamond (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{\beta \gamma + b-a+1} ((\alpha \diamond \gamma) \diamond \beta - (-1)^{(b-a+1)(\alpha+1)} \alpha \diamond (\gamma \diamond \beta)). \\ \alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) &= (-1)^{\beta \gamma + b-a+1} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta) \\ \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) &= (-1)^{\alpha + b-a+1} (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \\ (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma &= (-1)^{\beta \gamma + b-a+1} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta. \end{aligned}$$

Définissons maintenant les produits  $m_2$  et  $\ell$  en posant :

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta) &= (-1)^{1 \cdot \alpha} \alpha \cdot \beta = \alpha \wedge \beta - (-1)^{\alpha \beta} \beta \wedge \alpha \\ \text{et } \ell(\alpha, \beta) &= (-1)^{(b-a+1) \cdot \alpha} [\alpha, \beta] = \alpha \diamond \beta - (-1)^{\alpha \beta + b-a+1} \beta \diamond \alpha. \end{aligned}$$

On aura aussi les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \ell(\beta, \gamma) &= 0 \\ \ell(\alpha, \beta \wedge \gamma) &= (-1)^{\alpha + b-a+1} \ell(\alpha, \beta) \wedge \gamma. \end{aligned}$$

De plus,  $m_2$  et  $\ell$  vérifient :

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta) &= -(-1)^{\alpha \beta} m_2(\beta, \alpha) \\ \ell(\alpha, \beta) &= -(-1)^{b-a+1} (-1)^{\alpha \beta} \ell(\beta, \alpha) \\ (-1)^{\alpha \gamma} \ell(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{\beta \alpha} \ell(\ell(\beta, \gamma), \alpha) + (-1)^{\gamma \beta} \ell(\ell(\gamma, \alpha), \beta) &= 0 \\ \ell(\alpha, m_2(\beta, \gamma)) &= (-1)^{\alpha + b-a+1} m_2(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{(\alpha + b-a+1)(\beta+1)} m_2(\beta, \ell(\alpha, \gamma)) \end{aligned}$$

On considère comme précédemment l'espace

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 1} \left( \bigotimes^n \mathcal{A}[-a+1] \right) = T^+(\mathcal{A}[-a+1])$$



et pour  $X = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \in \mathcal{H}$ , le degré  $dg(X) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$  noté simplement par  $x$ .

On prolonge  $\wedge$  à  $\mathcal{H}$  en  $D$  de telle façon que  $(\mathcal{H}, \delta, D)$  soit une cogèbre de Leibniz codifférentielle. Ce prolongement est donné par :

$$D(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes \alpha_3 \otimes \cdots \otimes \alpha_n + \\ + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < k} \alpha_i} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_n.$$

On prolonge après  $\diamond$  à  $\mathcal{H}$  en  $R_2$ . Si  $X = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$  et  $Y = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$  sont deux éléments de  $\mathcal{H}$ , ce prolongement est donné par :

$$R_2(X, Y) = \\ = (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-1, q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p) \alpha_{p+1}} \alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \widehat{\alpha_{\sigma^{-1}(p)}} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ + \sum_{\substack{2 \leq k \leq p \\ \sigma \in Sh_{p-k, q-1}}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{(\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_p) \alpha_{p+1}} (-1)^{(b-a+1) \sum_{s < k} \alpha_s} \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes \\ \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots \widehat{\alpha_{\sigma^{-1}(p)}} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

On considère, maintenant, l'espace  $\mathcal{H}[a - b - 1]$  muni de la graduation  $dg'(X) = dg(X) - a + b + 1$  noté simplement par  $x'$  pour  $X \in \mathcal{H}[a - b - 1]$ . On pose  $R'_2(X, Y) = (-1)^{(a-b-1)dg'(X)} R_2(X, Y)$ . Alors, le produit  $R'_2$  est de degré 0 dans  $\mathcal{H}[a - b - 1]$  et la différentielle  $D$  reste de degré 1. Et on a

### Théorème 6.1.

*Le triplet  $(\mathcal{H}[a - b - 1], R'_2, D)$  est une algèbre pré-Lie différentielle graduée.*

*Démonstration.*

La démonstration de ce théorème reprend celle du théorème de [A] pour les  $(a, b)$ -algèbres : les choix de signes sont ceux de [A] et les prolongements sont ceux des algèbres pré-Gerstenhaber [AAC2]. Dans la preuve, plusieurs cas apparaissent. Par exemple, prouvons la relation (\*) suivante :

$$R'_2(R'_2(X, Y), Z) - R'_2(X, R'_2(Y, Z)) - (-1)^{y'z} (R'_2(R'_2(X, Z), Y) - R'_2(X, R'_2(Z, Y))) = 0.$$

Soient

$$X = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p, \\ Y = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q} \\ Z = \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q+r}$$

trois éléments de  $\mathcal{H}[a - b - 1]$ .

Dans la relation (\*), il apparaît 4 types de termes :

1. Dans  $(*)$ , il apparaît des termes avec deux  $\diamond$  :

$$(\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \diamond \alpha_{p+q+1}, \quad \alpha_1 \diamond (\alpha_{p+1} \diamond \alpha_{p+q+1}), \quad (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1}) \diamond \alpha_{p+1}, \quad \alpha_1 \diamond (\alpha_{p+q+1} \diamond \alpha_{p+1}).$$

Ces termes apparaissent sous la forme  $\pm \text{terme} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)}$  où  $\sigma$  est un shuffle de  $\{1, \dots, p+q+r\} \setminus \{1, p+1, p+q+1\} : \sigma \in Sh_{p-1, q-1, r-1}$ . Plus précisément, on pose :

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\alpha(\sigma)(-1)^{(x-\alpha_1)\alpha_{p+1}}(-1)^{(x+y-\alpha_1-\alpha_{p+1})\alpha_{p+q+1}},$$

et

$$A_\sigma = \alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots \widehat{p+1} \dots \widehat{p+q+1} \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)}.$$

La contribution des termes correspondants est  $C \otimes (\varepsilon_\sigma A_\sigma)$  avec :

$$\begin{aligned} C = & (-1)^{(a-b-1)y'} \left( (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \diamond \alpha_{p+q+1} - (-1)^{(b-a+1)(\alpha_1+1)} \alpha_1 \diamond (\alpha_{p+1} \diamond \alpha_{p+q+1}) \right. \\ & \left. - (-1)^{\alpha_{p+1}\alpha_{p+q+1}+b-a+1} ((\alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1}) \diamond \alpha_{p+1} - (-1)^{(b-a+1)(\alpha_1+1)} \alpha_1 \diamond (\alpha_{p+q+1} \diamond \alpha_{p+1})) \right). \end{aligned}$$

Ces termes se simplifient grâce à la relation vérifiée par  $\diamond$ .

2. Dans  $(*)$ , il apparaît des termes avec un double crochet  $\ell$  ou un  $\diamond$  dans un crochet :

$$\ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}), \alpha_{p+q+1}), \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1} \diamond \alpha_{p+q+1}), \ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}), \alpha_{p+1}), \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1} \diamond \alpha_{p+1}).$$

Ces termes apparaissent pour  $1 < k \leq p$  sous la forme

$$\begin{aligned} & \pm (\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{k-1}) \otimes \text{terme} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \dots \widehat{p+1} \dots \widehat{p+q+1} \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)} \\ & = \pm A_k \otimes \text{terme} \otimes B_\sigma. \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est dans  $Sh_{p-k, q-1, r-1}$  agissant sur  $\{k+1, \dots, p+q+r\} \setminus \{p+1, p+q+1\}$ .

On obtient donc les termes  $(-1)^{(a-b-1)y'} \varepsilon_\alpha(\sigma) A_k \otimes C \otimes B_\sigma$  avec :

$$\begin{aligned} C = & \ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}), \alpha_{p+q+1}) - (-1)^{(\alpha_k+1)(b-a+1)} \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1} \diamond \alpha_{p+q+1}) \\ & - (-1)^{\alpha_{p+1}\alpha_{p+q+1}+b-a+1} \left( \ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}), \alpha_{p+1}) - (-1)^{(\alpha_k+1)(b-a+1)} \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1} \diamond \alpha_{p+1}) \right) \\ = & \ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}), \alpha_{p+q+1}) - (-1)^{(\alpha_k+1)(b-a+1)} \ell(\alpha_k, \ell(\alpha_{p+1}, \alpha_{p+q+1})) \\ & - (-1)^{\alpha_{p+1}\alpha_{p+q+1}+b-a+1} \ell(\ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}), \alpha_{p+1}) \\ = & 0. \end{aligned}$$

3. Dans  $(*)$ , il apparaît des termes de la forme

$$\dots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \dots, \quad \dots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \dots.$$

Plus précisément :

- Dans  $R'_2(R'_2(X, Y), Z)$ , pour tout  $k \in \{2, \dots, p\}$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(1.1) : \dots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \dots, \text{ avec } k < \ell \leq p,$$

$$(1.2) : \dots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \dots, \text{ avec } p+1 < \ell \leq p+q,$$

$$(1.3) : \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < \ell < k.$$

- Dans  $R'_2(X, R'_2(Y, Z))$ , pour tout  $k \in \{2, \dots, p\}$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(2.1) : \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+1 < \ell \leq p+q.$$

- Dans  $R'_2(R'_2(X, Z), Y)$ , pour tout  $k \in \{2, \dots, p\}$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(3.1) : \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } k < \ell \leq p,$$

$$(3.2) : \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+q+1 < \ell \leq p+q+r,$$

$$(3.3) : \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < \ell < k.$$

- Dans  $R'_2(X, R'_2(Z, Y))$ , pour tout  $k \in \{2, \dots, p\}$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(4.1) : \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_\ell, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+q+1 < \ell \leq p+q+r.$$

Il est clair que  $(1.2) - (2.1) = 0$  et  $(3.2) - (4.1) = 0$ . En utilisant la commutativité des battements, on vérifie que  $(1.1) = (3.3)$  et  $(1.3) = (3.1)$ .

4. Enfin, dans  $(*)$ , il apparaît des termes de la forme

$$\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \quad \alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots$$

Plus précisément,

- Dans  $R'_2(R'_2(X, Y), Z)$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(1.1)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < k \leq p,$$

$$(1.2)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+1 < k \leq p+q,$$

$$(1.3)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < k \leq p.$$

- Dans  $R'_2(X, R'_2(Y, Z))$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(2.1)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+1 < k \leq p+q.$$

- Dans  $R'_2(R'_2(X, Z), Y)$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(3.1)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < k \leq p,$$

$$(3.2)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+q+1 < k \leq p+q+r,$$

$$(3.3)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+q+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } 1 < k \leq p.$$

- Dans  $R'_2(X, R'_2(Z, Y))$ , les termes qui apparaissent sont :

$$(4.1)' : \alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \ell(\alpha_k, \alpha_{p+1}) \otimes \cdots, \text{ avec } p+q+1 < k \leq p+q+r.$$

Il est clair que  $(1.2)' - (2.1)' = 0$  et  $(3.2)' - (4.1)' = 0$ . En utilisant la commutativité du produit Shuffle, on vérifie que  $(1.1)' = (3.3)'$  et  $(1.3)' = (3.1)'$ .

On montre de même que la différentielle  $D$  est une dérivation de  $R'_2$ . Pour  $X = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$  et  $Y = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$ , on vérifie que

$$D \circ R'_2(X, Y) = R'_2(D(X), Y) + (-1)^{x'} R'_2(X, D(Y))$$

□

Maintenant, puisque  $(\mathcal{H}[a - b - 1], R'_2, D)$  est une algèbre pré-Lie différentielle graduée, on construit alors sa  $preL_\infty$  algèbre enveloppante  $(\mathcal{H}[a - b] \otimes S(\mathcal{H}[a - b]), \Delta, Q)$ . Explicitement, dans  $\mathcal{H}[a - b]$ , le degré est  $deg''(X) = deg(X) - a + b = x''$ , on pose

$$R''_2(X, Y) = (-1)^{x''} R'_2(X, Y) \quad \text{et} \quad \ell''_2(X, Y) = R''_2(X, Y) + (-1)^{x''y''} R''_2(Y, X).$$

On prolonge ensuite à  $\mathcal{H}[a - b] \otimes S(\mathcal{H}[a - b])$ ,  $D$  et  $R''_2$  en  $m$  et  $R$  par :

$$\begin{aligned} m(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) &= D(X_0) \otimes X_1 \dots X_n + \\ &\quad + (-1)^{x''_0} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{x''} \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_j \ x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) X_0 \otimes D(X_j) \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n \\ &= D(X_0) \otimes X_1 \dots X_n + (-1)^{x''_0} X_0 \otimes m''(X_1 \dots X_n) \end{aligned}$$

où  $m''$  est la codérivation donnée comme ci-dessus dans le cas des  $(a, b)$ -algèbres.

De même,

$$\begin{aligned} R(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_{x''} \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_1 \dots \hat{i} \dots x_n \end{matrix} \right) R''_2(X_0, X_i) \otimes X_1 \dots \hat{i} \dots X_n + \\ &\quad + (-1)^{x''_0} \sum_{i < j} \varepsilon_{x''} \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) X_0 \otimes \ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_n \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_{x''} \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_1 \dots \hat{i} \dots x_n \end{matrix} \right) R''_2(X_0, X_i) \otimes X_1 \dots \hat{i} \dots X_n \\ &\quad + (-1)^{x''_0} X_0 \otimes \ell''(X_1 \dots X_n), \end{aligned}$$

où  $\ell''$  est la codérivation donnée comme ci-dessus dans le cas des  $(a, b)$ -algèbres.

Si on pose  $Q = (m + R)$ , alors  $Q$  est une codérivation de  $\Delta$  vérifiant  $deg''(Q) = 1$  et  $Q^2 = 0$ .

Ainsi on obtient que  $(\mathcal{H}[a - b] \otimes S(\mathcal{H}[a - b]), \Delta, Q = m + R)$  est une cogèbre permutative codifférentielle, c'est à dire, une  $preL_\infty$  algèbre.

Il reste à construire sur cette  $preL_\infty$  algèbre le coproduit  $\kappa$  qui fera de  $\mathcal{H}[a - b] \otimes S(\mathcal{H}[a - b])$  une cogèbre de Leibniz. C'est le but de la section suivante.

7. LE COPRODUIT  $\kappa$ 

D'abord, on a vu que  $(\mathcal{H}, \delta)$  est une cogèbre de Leibniz. On rappelle que :

$$\delta(X) = \delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \leq k \leq n-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \bigotimes \mu_{n-k}(x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

On note simplement le coproduit  $\delta$  :

$$\delta(X) = \sum_{U \otimes V = X} U \otimes \mu V.$$

On se place maintenant dans  $\mathcal{H}[a-b]$ , le coproduit  $\delta$  symétrisé sera noté  $\kappa$ .

**Définition 7.1.**

Sur  $\mathcal{H}[a-b]$ , on définit le cocrochet suivant :

$$\kappa(X_0) = \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{(a-b)u_0''} \left( U_0 \bigotimes \mu V_0 + (-1)^{u_0''v_0''+a-b+1} \mu V_0 \bigotimes U_0 \right)$$

Ce cocrochet  $\kappa$  se prolonge en un coproduit, toujours noté  $\kappa$ , de degré  $a-b$ , défini sur  $\mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b])$  par :

$$\begin{aligned} \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = & \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 \cdot X_J \right. \\ & \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 \cdot X_I \right) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \delta''(X_1 \dots X_n), \end{aligned}$$

où  $\delta''$  est le cocrochet sur  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ , défini comme dans la section sur les  $(a, b)$ -algèbres par :

$$\begin{aligned} \delta''(X_1 \dots X_n) = & \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i < s} (a-b)x_i''} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)u_s''} \times \\ & \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I u_s v_s x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot U_s \bigotimes \mu V_s \cdot X_J + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I v_s u_s x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot \mu V_s \bigotimes U_s \cdot X_J \right). \end{aligned}$$

Maintenant  $\kappa$  est un coproduit de degré  $a-b$  qui, en un certain sens, prolonge le coproduit de Leibniz  $\delta$ , de degré 0, défini sur  $\mathcal{H}$ . En fait, on peut dire que  $(\mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b]), \kappa)$  est une cogèbre de Leibniz, en tenant compte de ce décalage de degré. C'est à dire :

**Proposition 7.2.**

Le coproduit  $\kappa$  vérifie :

$$(-1)^{a-b} (id \otimes \kappa) \circ \kappa = (\kappa \otimes id + \tau_{23}'' \circ (\kappa \otimes id)) \circ \kappa.$$

*Démonstration.*

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
& (-1)^{a-b}(id \otimes \kappa) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
& = (id \otimes \kappa) \left( \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)(u_0''+1)} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.X_I \right) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{(a-b+1)x_0''} X_0 \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \right) \\
& = \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)(u_0''+1)} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \delta''(\mu V_0.X_J) + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes \delta''(U_0.X_I) \right) \\
& \quad + (-1)^{(a-b+1)x_0''} X_0 \otimes (id \otimes \delta'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n) \\
& = (1.1) + (1.2),
\end{aligned}$$

où (1, 2) est le dernier terme, en  $X_0 \otimes \delta'' \circ (id \otimes \delta'')$ .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
& = (\kappa \otimes id) \left( \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.X_I \right) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \right) \\
& = \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) \kappa(U_0 \otimes X_I) \bigotimes \mu V_0.X_J + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \kappa(\mu V_0 \otimes X_J) \bigotimes U_0.X_I \right) + \\
& \quad + (-1)^{(a-b)x_0''} \kappa(X_0) \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) \\
& = (2.1) + (2.2),
\end{aligned}$$

où (2, 2) est le dernier terme, en  $X_0 \otimes (\delta'' \otimes id) \circ \delta''$ .

Et on a aussi :

$$\begin{aligned}
& \tau_{23}'' \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
& = \tau_{23}'' \left( \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) \kappa(U_0 \otimes X_I) \bigotimes \mu V_0 \cdot X_J + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \kappa(\mu V_0 \otimes X_J) \bigotimes U_0 \cdot X_I \right) + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{(a-b)x_0''} \kappa(X_0) \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \right) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \tau_{23}'' \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) \\
& = (3.1) + (3.2),
\end{aligned}$$

où (3.2) est le terme en  $X_0 \otimes \tau_{23}'' \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''$ .

L'identité de coJacobi est vérifiée par  $\delta''$  : elle se montre comme pour les  $(a, b)$ -algèbres ([A]), donc (1.2) = (2.2) + (3.2).

Dans tous les termes restants, l'élément  $X_0$  a été coupé au moins une fois. Ces termes correspondent donc au cas où on coupe deux fois  $X_0$  par  $\kappa$  et au cas où on coupe une fois  $X_0$  et une fois un des  $X_t$  ( $t > 0$ ) par  $\kappa$ . On vérifie comme dans [AAC2] que (1.1) = (2.1) + (3.1).  $\square$

En fait, les coproduits de Leibniz  $\kappa$  et permutatif  $\Delta$  ont des propriétés de compatibilités, ce qui fait de  $(\mathcal{H}[a - b] \otimes S(\mathcal{H}[a - b]), \Delta, \kappa)$  une bicogèbre au sens de Loday ([L2]).

### Proposition 7.3.

Les coproduits  $\Delta$  et  $\kappa$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

- (1) :  $(id \otimes \kappa) \circ \Delta = (-1)^{a-b+1} \tau_{23} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta,$
- (2) :  $(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta,$
- (3) :  $(\Delta \otimes id) \circ \kappa = (id \otimes \kappa) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta.$

*Démonstration.*

(1) On rappelle que :

$$\Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = X_0 \bigotimes X_1 \dots X_n + X_0 \otimes \Delta'(X_1 \dots X_n).$$

où  $\Delta'(X_1 \dots X_n)$  est le coproduit défini sur la cogèbre cocommutative  $S^+(\mathcal{H}[a - b])$ . On a donc :

$$(id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \left( X_0 \bigotimes \delta'' + X_0 \otimes (id \otimes \delta'') \circ \Delta' \right) (X_1 \dots X_n)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \tau_{23}'' \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
& = \left( X_0 \bigotimes \tau_{23}'' \circ \delta'' + X_0 \otimes (id \otimes \tau_{23}'' \circ \delta'') \circ \Delta' \right) (X_1 \dots X_n)
\end{aligned}$$

Comme  $\tau_{23}'' \circ \delta'' = (-1)^{a-b+1} \delta''$ . Ainsi,  $\tau_{23}'' \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta = (-1)^{a-b+1} (id \otimes \kappa) \circ \Delta$ .

(2) D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) &= \\
&= (id \otimes \Delta) \left( \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \otimes \mu V_0 \cdot X_J + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \otimes U_0 \cdot X_I \right) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \right) \\
&= \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\}; K \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)u_0''} \left\{ \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_{J \cup K} \end{smallmatrix} \right) \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & x_{J \cup K} \\ v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \otimes \mu V_0 \cdot X_J \otimes X_K \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} v_0 & x_{J \cup K} \\ x_K & v_0 & x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \otimes X_K \otimes \mu V_0 \cdot X_J \right) + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_{I \cup K} \end{smallmatrix} \right) \left( \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & x_{I \cup K} \\ v_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \otimes U_0 \cdot X_I \otimes X_K + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & x_{I \cup K} \\ x_K & u_0 & x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \otimes X_K \otimes U_0 \cdot X_I \right) \right\} + \\
&\quad + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes (id \otimes \Delta') \circ \delta''(X_1 \dots X_n) \\
&= (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) + (1.5).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(\kappa \otimes id) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) &= (\kappa \otimes id) \left( X_0 \otimes X_1 \dots X_n + X_0 \otimes \Delta'(X_1 \dots X_n) \right) \\
&= \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \\
&\quad \times \left( \left( U_0 \otimes \mu V_0 \otimes X_1 \dots X_n + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 \\ v_0 & u_0 \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes U_0 \otimes X_1 \dots X_n \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \\ I \cup K \neq \emptyset, J \neq \emptyset}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_{I \cup J} & x_K \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \otimes \mu V_0 \cdot X_J \otimes X_K + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_{I \cup J} & x_K \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \otimes U_0 \cdot X_I \otimes X_K \right) + \\
&\quad \left. + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes (\delta'' \otimes id) \circ \Delta'(X_1 \dots X_n) \right) \\
&= \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{(a-b)u_0''} \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \\ K \neq \emptyset}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \otimes \mu V_0 \cdot X_J \otimes X_K + \\
&\quad + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \otimes U_0 \cdot X_I \otimes X_K + \\
&\quad + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes (\delta'' \otimes id) \circ \Delta'(X_1 \dots X_n) \\
&= (2.1) + (2.2) + (2.3).
\end{aligned}$$



De même,

$$\begin{aligned}
& \tau_{23}'' \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
& = \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \\
& \times \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \\ K \neq \emptyset}} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} v_0 & x_J & x_K \\ x_K & v_0 & x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes X_K \bigotimes \mu V_0.X_J + \\
& + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 & x_I & x_K \\ x_K & u_0 & x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes X_K \bigotimes U_0.X_I + \\
& + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \tau_{23}'' \circ (\delta'' \otimes id) \circ \Delta'(X_1 \dots X_n) \\
& = (3.1) + (3.2) + (3.3).
\end{aligned}$$

On vérifie que (1.5) = (2.3) + (3.3), grâce à l'identité de coLeibniz entre  $\Delta'$  et  $\delta''$ , établie comme dans [A]. De même, (1.1) = (2.1), (1.3) = (3.1), (1.2) = (2.2) et (1.4) = (3.2).

(3) Cette relation se démontre comme la relation précédente (2).  $\square$

On a ainsi muni l'espace  $\mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b])$  d'une structure de bicogèbre permutative et de Leibniz. On note cette bicogèbre  $(\mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b]), \Delta, \kappa)$ .

## 8. PRÉ-(a, b)-ALGÈBRE À HOMOTOPIE PRÈS

On va montrer que les codérivations  $m$  et  $R$  de  $\Delta$ , obtenues à partir des lois de  $\mathcal{A}$ , sont aussi des codérivations du coproduit  $\kappa$ . Par conséquent  $m + R$  est une codifférentielle à la fois pour  $\Delta$  et pour  $\kappa$ . On posera donc :

### Définition 8.1.

Une pré-(a, b)-algèbre à homotopie près ou pré-(a, b) $_{\infty}$  algèbre est, pour le même opérateur  $Q$ , une cogèbre permutative codifférentielle  $(\mathcal{C}, \Delta, Q)$  et une cogèbre de Leibniz codifférentielle  $(\mathcal{C}, \kappa, Q)$  telle que les deux coproduits  $\Delta$  et  $\kappa$  satisfassent les relations de compatibilités suivantes :

$$\begin{aligned}
(id \otimes \kappa) \circ \Delta &= (-1)^{a-b+1} \tau_{23}'' \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta, \\
(id \otimes \Delta) \circ \kappa &= (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{23}'' \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta, \\
(\Delta \otimes id) \circ \kappa &= (id \otimes \kappa) \circ \Delta + \tau_{23}'' \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta.
\end{aligned}$$

### Proposition 8.2.

Soit  $\mathcal{A}$  une pré-(a, b)-algèbre. Sur la bicogèbre  $(\mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b]), \Delta, \kappa)$ , l'opérateur de degré 1 et de carré nul  $Q = m + R$  est une codérivation du coproduit  $\kappa$ , c'est à dire :  $(Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \kappa = (-1)^{a-b} \kappa \circ Q$ .

*Démonstration.*

1. Montrons d'abord que  $m$  est une codérivation de  $\kappa : (m \otimes id + id \otimes m) \circ \kappa = (-1)^{a-b} \kappa \circ m$ .

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = & \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \times \left( \varepsilon_{x'} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J + \right. \\ & \left. + (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.X_I \right) + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \end{aligned}$$

et

$$m(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = D(X_0) \otimes X_1 \dots X_n + (-1)^{x_0''} X_0 \otimes m'(X_1 \dots X_n),$$

où on a noté  $m'$  la codifférentielle  $m$  de  $\Delta'$  et  $\delta''$  dans  $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ .

En développant, on trouve alors 10 termes dans  $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \kappa$  et dans  $(-1)^{a-b} \kappa \circ m$ .

- D'une part  $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n)$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} (-1)^{(a-b)u_0''} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) \times \\ & \quad \times \left( D(U_0) \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J + (-1)^{u_0''} U_0 \otimes m'(X_I) \bigotimes \mu V_0.X_J \right) + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)u_0''} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \times \\ & \quad \times \left( D(V_0) \otimes X_J \bigotimes U_0.X_I + (-1)^{v_0''} \mu V_0 \otimes m'(X_J) \bigotimes U_0.X_I \right) + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)u_0'' + x_I'' + u_0''} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes D(\mu V_0).X_J + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)u_0'' + x_I'' + u_0'' + v_0''} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.m'(X_J) + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)u_0'' + x_J'' + v_0''} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes D(U_0).X_I + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)u_0'' + x_J'' + v_0'' + u_0''} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.m'(X_I) + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)x_0''} D(X_0) \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) + \\ & \quad + (-1)^{(a-b)x_0''} X_0 \bigotimes (m' \otimes id + id \otimes m') \circ \delta''(X_1 \dots X_n) \\ & = (1.1) + \dots + (1.10). \end{aligned}$$

- De même, puisque  $\mu D(V_0) = D(\mu V_0)$ , et si  $X_0 = U_0 \otimes V_0$ ,

$$D(X_0) = D(U_0) \otimes V_0 + (-1)^{u_0''} U_0 \otimes D(V_0) = U_0' \otimes V_0 + (-1)^{u_0''} U_0 \otimes V_0',$$

et comme  $m'(X_I.X_J) = m'(X_I).X_J + (-1)^{x_I''} X_I.m'(X_J) = X_I'.X_J \pm X_I.X_J'$ , alors on développe  $(-1)^{a-b} \kappa \circ m(X_0 \otimes X_1 \dots X_n)$  en :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{a-b} \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}}} \left( (-1)^{(a-b)(u'_0)''} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u'_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u'_0 x_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U'_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 \cdot X_J + \right. \\
& + (-1)^{(a-b)(u'_0)''} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u'_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u'_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U'_0 \cdot X_I + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + u''_0} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v'_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v'_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V'_0 \cdot X_J + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + u''_0} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v'_0 x_1 \dots x_n \\ v'_0 x_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V'_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 \cdot X_I + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + x''_0} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x'_I v_0 x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes m'(X_I) \bigotimes \mu V_0 \cdot X_J + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + x''_0} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x_J u_0 x'_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 \cdot m'(X_I) + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + x''_I + x''_0} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0 x_I v_0 x'_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 \cdot m'(X_J) + \\
& + (-1)^{(a-b)u''_0 + x''_I + x''_0} (-1)^{a-b+1} \varepsilon_{x''} \left( \begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0 x'_J u_0 x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes m'(X_J) \bigotimes U_0 \cdot X_I \Big) \\
& + (-1)^{a-b} (-1)^{(a-b)(x''_0+1)} D(X_0) \otimes \delta''(X_1 \dots X_n) \\
& + (-1)^{a-b} (-1)^{(a-b+1)x''_0} X_0 \bigotimes \delta'' \circ m'(X_1 \dots X_n) \\
& = (2.1) + \dots + (2.10).
\end{aligned}$$

On a immédiatement (1.10) = (2.10) car on sait que  $m'$  est une codérivation de  $\delta''$  (comme dans [A]). On a aussi immédiatement (1.9) = (2.9). Les autres termes se simplifient deux à deux suivant :

$$\begin{aligned}
(1.1) &= (2.1), & (1.2) &= (2.5), & (1.3) &= (2.4), & (1.4) &= (2.8), \\
(1.5) &= (2.3), & (1.6) &= (2.7), & (1.7) &= (2.2), & (1.8) &= (2.6).
\end{aligned}$$

2. La relation  $(R \otimes id + id \otimes R) \circ \kappa = (-1)^{a-b} \kappa \circ R$  se démontre comme dans [AAC2].  $\square$

### Théorème 8.3.

Soit  $(\mathcal{A}, \lambda, \diamond)$  une pré-(a, b)-algèbre, notons  $\mathcal{H} = T^+(\mathcal{A}[-a+1])$ ,  $\Delta, \kappa$  les coproduits et  $Q = m + R$ , la codérivation définis ci-dessus sur  $\mathcal{H}[a-b] \otimes S^+(\mathcal{H}[a-b])$ , alors

$$\left( \mathcal{H}[a-b] \otimes S(\mathcal{H}[a-b]), \Delta, \kappa, Q \right)$$

est une pré-(a, b) $_{\infty}$  algèbre, appelée la pré-(a, b)-algèbre à homotopie près enveloppante de  $(\mathcal{A}, \lambda, \diamond)$ .

### RÉFÉRENCES

- [A] W. Aloulou, Les (a, b)-algèbres à homotopie près, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 17, no 1 (2010), 97-151 .

- [AAC] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologies de Chevalley-Harrison*, Bull. Sci. Math., vol 133, (2009) 1-50.
- [AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292.
- [AAC2] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Algèbre pré-Gerstenhaber à homotopie près*, preprint arXiv : 1206.4335v1 [math.QA] 19 Jun 2012.
- [Ag] M. Aguiar, *Pre-Poisson algebras*, Lett. Math. Phys. Vol 54 (2000), 263-277.
- [AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.
- [BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.C. Herbig, S. Waldmann, *Formalité  $G_\infty$  adaptée et star-représentations sur des sous variétés coisotropes*, math.QA/0504276 v 1 13 Apr 2005.
- [ChL] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not., vol 8, (2001), 395-408.
- [C] R. Chatbouri, *Algèbres enveloppantes à homotopie près, homologies et cohomologies*, Ann. Math. Fac. Sci. Toulouse vol XX, série 6, Fascicule 1 (2011), 99-133.
- [F] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 13, no 2 (2006), 237-312.
- [G] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 11, no 1 (2004), 95-126.
- [GK] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. vol 76, (1994), 203-272.
- [L1] J.L. Loday, *La renaissance des opérades*, Astérisque, vol 237, (1996), Séminaire Bourbaki 1994/1995, expo. no. 792.
- [L2] J.L. Loday, *Dialgebras*, Prépub. Inst. Rech. Math. Av. 14 (1999).
- [Liv] M. Livernet, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manuscripta Math. vol 96, (1998), 295-315.
- [Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. vol 90, (1969), 205-295.

UNIVERSITÉ DE SOUSSE, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE PHYSIQUE FONCTIONS SPÉCIALES ET APPLICATIONS. UNIVERSITÉ DE SFAX, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ETUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX, ROUTE MENZEL CHAKER KM 0.5, SFAX, 3018, TUNISIE  
*E-mail address:* Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn